Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2018

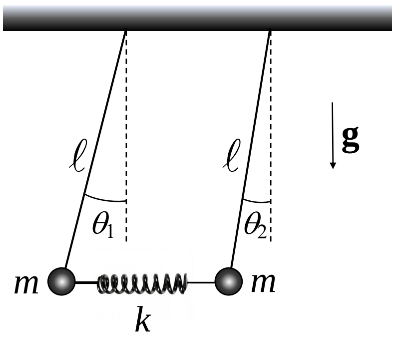
Mecânica Clássica

09/03/2018 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Pequenas Oscilações

A figura abaixo mostra dois pêndulos simples acoplados por uma mola de constante elástica k. Cada pêndulo tem massa m e comprimento ℓ. Na posição vertical, os pêndulos estão em equilíbrio estável com a mola não deformada. Considere pequenos desvios em relação a esta posição de equilíbrio.



(a) (40%) Obtenha as equações diferenciais de movimento para as variáveis θ_1 e θ_2.

(b) (20%) Usando as relações

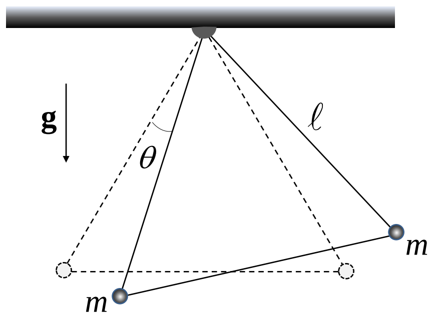
$$\eta_1 = \theta_1 + \theta_2$$
$$\eta_2 = \theta_1 - \theta_2,$$

obtenha as equações diferenciais de movimento para as novas variáveis η_1 e η_2.

(c) (40%) Descreva os possíveis modos normais de oscilação do sistema.

Questão 2: Formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano

Três hastes, cada uma com comprimento ℓ e massa desprezível, e duas esferas puntiformes, cada uma com massa m, formam um corpo rígido no qual as hastes são lados de um triângulo equilátero e cada esfera ocupa um vértice. O plano do corpo está na vertical onde a aceleração da gravidade é uniforme e tem magnitude g. O sistema pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que passa pelo vértice desocupado, formando o pêndulo mostrado na figura.



(a) (30%) Considere um sistema de coordenadas ortogonais com origem no ponto de sustentação e os seguintes vetores unitários: $\hat{\mathbf{e}}_1$ ao longo da bissetriz pelo vértice no ponto de sustentação, $\hat{\mathbf{e}}_2$ paralelo ao lado que une as duas massas e $\hat{\mathbf{e}}_3$ perpendicular ao plano do pêndulo. Determine todos os elementos de matriz I_{ij} do tensor de inércia.

(b) (20%) Suponha que a energia potencial gravitacional U é nula na origem. Determine a função lagrangiana $L(\theta, \dot{\theta})$ e a função hamiltoniana $H(\theta, p_\theta)$ do sistema, onde θ é o desvio angular em relação ao equilíbrio.

(c) (50%) Obtenha as equações diferenciais de movimento nos dois formalismos. Determine, então, a frequência natural de pequenas oscilações do pêndulo.

Dados:

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right);$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j;$$

$$\tau_i = \sum_j I_{ij} \alpha_j;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0; \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j};$$

$$H(q_k, p_k; t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k; t); \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Questão 3: Campo Central

Considere um sistema de duas partículas com massas m_1 e m_2, separadas por uma distância $r = |\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|$, onde $\mathbf{r_i}$ é o vetor posição da i-ésima partícula ($i = 1, 2$). O potencial de interação entre as partículas é do tipo $U = U(r)$.

(a) (20%) Mostre que no referencial do centro de massa o problema pode ser reduzido ao de uma única partícula com massa $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

(b) (50%) Sabendo que o movimento do sistema ocorre em um plano, escreva sua função lagrangiana. Determine, então, as constantes de movimento e as interprete fisicamente.

(c) (30%) Na descrição do item (b), determine o potencial *efetivo* para uma força

$$F = -\frac{k}{r^2},$$

onde k é uma constante positiva.

Questão 4: Corpos Rígidos

Considere um cubo de lado L e massa M uniforme. Os lados do cubo estão alinhados com um sistema de eixos de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3). A origem está em um dos cantos do cubo, onde há um pivô.

(a) (30%) Determine os nove elementos de matriz do tensor de inércia do cubo,

$$I_{ij} = \int \left(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j\right) dm,$$

onde $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Seja $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ a velocidade angular do cubo. Determine sua energia cinética de rotação.

(b) (30%) Suponha que o cubo gira instantaneamente em torno do eixo x_1 com velocidade angular $\vec{\omega} = (\Omega, 0, 0)$. Determine o momento angular $\vec{L}$ do cubo e o ângulo entre $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$.

(c) (40%) Em um outro sistema cartesiano com a mesma origem, $\vec{\omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ e a energia cinética de rotação é dada por

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1' \Omega_1^2 + I_2' \Omega_2^2 + I_3' \Omega_3^2\right).$$

Determine I_1', I_2' e I_3'.

Dados:

$$(\alpha - \lambda)^3 - 3\beta^2(\alpha - \lambda) + 2\beta^2 = (\alpha - \beta - \lambda)^2(\alpha + 2\beta - \lambda).$$